Prova 1-Métodos Matemáticos- Rubens Amaral- Explicite sua argumentação

Q1)a) Mostre que Sendo **a** e **b** racionais então **a+b** é também racional.
b) Sendo **a** racional e **b** irracional pode-se concluir que **a+b** é irracional?
c) E sendo **a** e **b**, ambos, irracionais?

Q2) Descreva o princípio da indução matemática.
Considere a seguinte aplicação. Quero mostrar que o conjunto das soluções da equação $x^4 - 20x^3 + 140x^2 - 400x + 384$ é o conjunto dos números pares. Verifico que vale para x=2, $2^4 - 20 * 2^3 + 140 * 2^2 - 400 * 2 + 384 = 0$. Verifico que valendo para n=2 valerá para n+2=4, já que $4^4 - 20 * 4^3 + 140 * 4^2 - 400 * 4 + 384 = 0$. Concluo que vale para todo n par. Estou certo? Critique.

Q3) Considere os conjuntos: A, dos números naturais; B, dos números naturais pares; C dos números racionais e D dos números irracionais. Todos eles apresentam número infinito de elementos. Os conjuntos A e B são considerados de mesma potência, infinitos equivalentes. Esclareça esse conceito e classifique os conjuntos acima quanto à cardinalidade.

Q4 Sejam os intervalos $(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}]$. Determine
a) $\cup_{n=1}^{\infty} I_n$; b) $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$; c) $\cup_{n=1}^{\infty} I_n^c$; d) $\cap_{n=1}^{\infty} I_n^c$. A partir desses resultados justifique a definição utilizada em espaços topológicos de uma coletânea de conjuntos abertos ser fechado sob uniões arbitrárias, eventualmente infinitas, mas sob interseções finitas.

Q5 Se a_n **(com** $a_n > 0$**)** define uma série convergente, $\sum_n a_n = c < \infty$, mostre que a série de a_n^2 também é convergente.
A recíproca é verdadeira, a convergência de a_n^2 garante a de a_n?

Q6 Se $f(x)$ é contínua em $x = a$ prove que $|f(x)|$ também é contínua no mesmo ponto. A recíproca é verdadeira?

Q7 Considere uma série de funções definidas num intervalo $b \geq x \geq a$. Qual a diferença entre convergência pontual e convergência uniforme da série? Para que a série das integrais seja convergente é necessária a convergência uniforme? Esclareça.